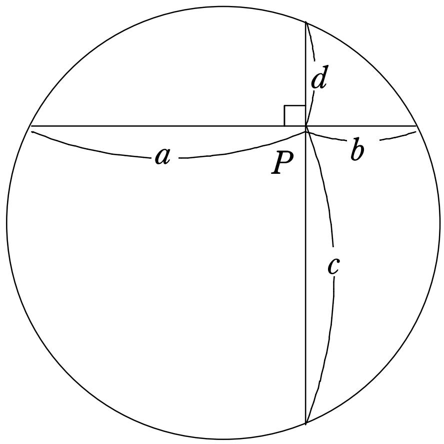
＜問題＞

半径 r の円内部の点 P で直交する２弦について，$a^2+b^2+c^2+d^2=4r^2$ を証明せよ．



解法としては，正弦定理の利用，余弦定理の利用，円の方程式の利用，相似の利用などが考えられます．

ここでは，方べきの定理と三平方の定理を利用したものを紹介します．

$\boxed{\text{証明}}$

$a>b$ としても一般性を失わないので，$a>b$ とする

図のように点 A , B , C , D を定める．

点 C を通り AB に平行な直線と

円の交点を E とする．

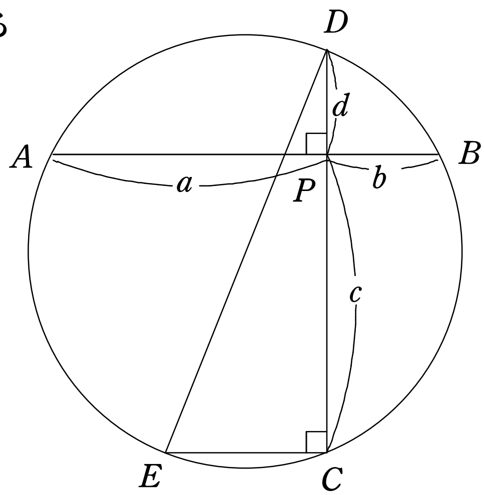
　　$AB /\!/ EC$ より，$\angle ECD=90^\circ$

よって，線分 DE が直径であることがわかる．

さらに，四角形 $AECB$ は等脚台形であるので，

E から AB に下ろした垂線の足を F とおくと，

　　$AF=PB=b$　　　　　　　　（下に続く）



従って，$FP=a-b$　となり，

$$EC=a-b$$

となる．

$\triangle ECD$ において<u>三平方の定理</u>より，

$$CE^2+CD^2=DE^2$$

$$(a-b)^2+(c+d)^2=(2r)^2$$

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2cd=4r^2 \cdots ①$$

また，<u>方べきの定理</u>より，

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

$$\therefore\quad ab=cd \cdots ②$$

①，② より　$a^2+b^2+c^2+d^2=4r^2$　　終