平成30年度 次世代の科学技術を担う人材育成事業

福岡県 高校生科学技術コンテスト ファーストステージ

数学

注意事項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れなどに気付いた場合は，挙手をして監督者に知らせなさい。ただし，問題内容にかかわる質問は，受け付けません。
3　解答用紙には，解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って正しく記入しなさい。
(1) 受験番号欄…受験票に記入されている受験番号を記入しなさい。
(2) 氏　名　欄…氏名を楷書で記入しなさい。
(3) 所属校名欄…受験票に記入されている所属校名を記入しなさい。
4　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

受験番号	
氏　　名	
所属校名	

福岡県教育委員会

第１問

問１　（ｉ）　方程式 $19x-13y=1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ のうち，x の値が正で最小のものを求めよ。

（ii）　19 で割ると 4 余り，13 で割ると 5 余る 3 桁の正の整数で最大のものを求めよ。

問２　右の表は 5 人の学生，A，B，C，D，E に 2 種類のテストを行った結果である。2 種類のテストの得点をそれぞれ x 点，y 点とする。

	A	B	C	D	E
x	6	9	5	3	7
y	4	7	1	3	5

（ｉ）　x の平均値 $\overline{x}$ および分散 ${s_x}^2$ を求めよ。

（ii）　x，y の共分散 s_{xy} を求めよ。

問３　x は実数，a は実数の定数とする。x についての条件 p，q を

$p：x<a$

q：「$x<1$ または $(x-2)(x-3)<0$」

とする。

（ｉ）　p が q の十分条件となる a の値の範囲を求めよ。

（ii）　p が q の必要条件となる a の値の範囲を求めよ。

問4　△ABCにおいて，AB=6，BC=5，CA=4とする。また，△ABCの内心をIとし，直線AIと辺BCとの交点をDとする。

（ｉ）　線分の長さの比BD：DCを求めよ。

（ii）　線分の長さの比AI：IDを求めよ。

問5　四面体ABCDにおいて，AB=8，BC=5，CA=7，DA=DB=DC=$\sqrt{71}$である。頂点Dから平面ABCに垂線DHを下ろす。

（ｉ）　cos∠ABCの値を求めよ。また，△ABCの外接円の半径をRとするとき，Rの値を求めよ。

（ii）　四面体ABCDの体積をVとするとき，Vの値を求めよ。

第２問

次の問いに答えよ。必要ならば，次の「解と係数の関係」を用いよ。

> ２次方程式
>
> $$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$
>
> の２つの解を α，β とすると
>
> $$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$
>
> である。

問１　２次方程式

$$x^2-x-3=0$$

の２つの解を α，β　$(\alpha<\beta)$ とする。

（ｉ）　$\alpha^2+\beta^2$ の値を求めよ。

（ii）　$\alpha^2-\alpha$ の値を求めよ。

（iii）　$(\alpha^2+\alpha-3)(\beta^2-2\beta-3)$ の値を求めよ。

問２　k は実数の定数とする。x の２次方程式

$$x^2-2kx+6-5k=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

について，$(*)$が異なる２つの実数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

問３　m は実数の定数とする。x の方程式

$$x^4-2mx^2+6-5m=0$$

が異なる４つの実数解をもつような m の値の範囲を求めよ。

第3問

袋の中にカードが9枚入っている。これらのカードにはそれぞれ1から9までの整数のうちの1つが書かれており，同じ整数が書かれたカードはない。この袋の中から1枚ずつ，元に戻さずにカードを引く。

1，2，3回目に引いたカードの番号をそれぞれ百，十，一の位の数として3桁の整数Nを作る。次の問いに答えよ。

問1　作ることが可能な異なる3桁の整数Nの個数をm，そのm個の3桁の整数Nの総和をSとする。

（i）　mの値を求めよ。

（ii）　$\dfrac{S}{m}$の値を求めよ。

問2　（i）　Nが偶数となる確率を求めよ。

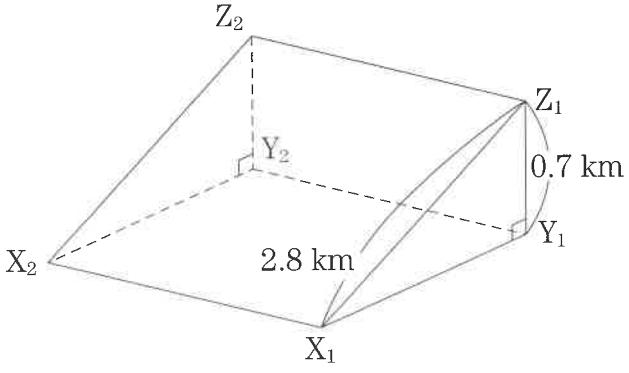
（ii）　Nが3の倍数となる確率を求めよ。

（iii）　Nが偶数となるとき，Nが3の倍数である条件付き確率を求めよ。

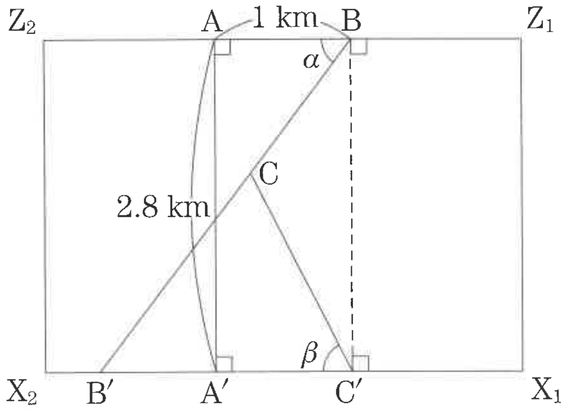
第4問

図Ⅰは，あるスキー場を三角柱の形に切り取って示したものである。$X_1Y_1Z_1$，$X_2Y_2Z_2$ の2つの面は隣り合うすべての面と垂直で，$X_1X_2 /\!/ Y_1Y_2 /\!/ Z_1Z_2$，$\angle X_1Y_1Z_1 = \angle X_2Y_2Z_2 = 90^\circ$，$Z_1X_1 = 2.8$ km，$Z_1Y_1 = 0.7$ km であり，4点 X_1，X_2，Y_1，Y_2 は同じ標高にある。

図Ⅱのように，平面 $X_1Z_1Z_2X_2$ にコースがある。



図Ⅰ



図Ⅱ

コースAは線分 AA′で示され，道のり AA′ = 2.8 km である。

コースBは線分 BB′で示され，コースCは折れ線 BCC′で示される。

点A，Bは線分 Z_1Z_2 上にあり，点A′，B′，C′は線分 X_1X_2 上にある。$AA' /\!/ BC' /\!/ Z_1X_1$，$AB = 1$ km であり，$\angle ABB' = \alpha$，$\angle CC'B' = \beta$ とすると，α，β はともに鋭角で，$\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$，$\tan\beta = \dfrac{12}{5}$ を満たす。

人の身長や雪上車の高さ，雪の深さ，コース幅などは考慮に入れないものとする。

（人や雪上車の動きは，線分上の動点として考える。）

次の問いに答えよ。

問1　（i）　コースBの道のり（線分 BB′ の長さ）を b(km)，コースCの道のり（線分 BC と CC′ の長さの和）を c(km)とする。b，c の値を求めよ。

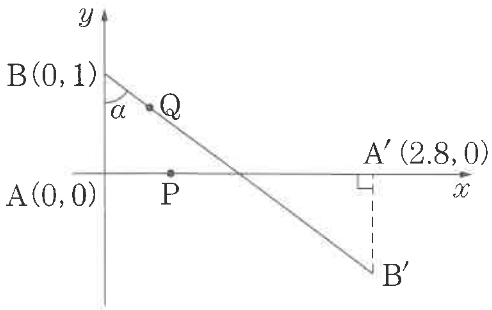
（ii）　点Cと平面 $X_1Y_1Y_2X_2$ との標高の差を h(km)（$h>0$）とする。h の値を求めよ。

問 2　スキーヤー P はコース A を時速 35 km の等速で，スノーボーダー Q はコース B を時速 25 km の等速で，それぞれ点 A，B を同時に出発して終点 A′，B′まで滑り降りるものとする。

このとき，P，Q 間の距離の最小値を求めたい。

（ⅰ）　P が点 A を出発して点 A′に到達するまでの所要時間は何分か求めよ。

（ⅱ）　点 A を原点，直線 AA′を x 軸，直線 AB を y 軸とするような座標平面を考える。また，出発してから t 分後における P，Q の位置に対応する座標平面上の点をそれぞれ P，Q とする。P，Q の座標を t を用いて表せ。また，2 点 P，Q 間の距離 PQ を t を用いて表せ。ただし，座標平面上の 2 点間の距離は以下のように求められる。



座標平面上の 2 点 P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$間の距離 PQ は

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

である。

（ⅲ）「（ⅱ）において PQ は $t=t_1$ のとき最小値 m をとる。したがって，P，Q 間の距離の最小値は m(km)であり，それは 2 人が出発してから t_1 分後のことである。」とわかる。t_1，m の値を求めよ。

問 3　スノーボーダー R はコース C を区間 BC 上は時速 25 km，区間 CC′上は時速 26 km の等速で滑り降りるものとする。また，雪上車 S はコース A を点 A′から点 A に時速 24 km の等速で登るものとする。

R，S がそれぞれ点 B，A′を同時に出発するとき，R，S の位置の標高が等しくなるのは，2 人が出発してから何分後のことか求めよ。

平成 30 年度 次世代の科学技術を担う人材育成事業

福岡県
高校生科学技術コンテスト
ファーストステージ

数学

解答解説

受験番号	
氏　　名	
所属校名	

福岡県教育委員会

第１問

【出題のねらい】

数と式やデータの分析など，数学Ⅰ，数学Ａの各分野の基本的な知識を問う。

［解答］

問１

（ｉ）　$19x-13y=1$　……①

$19=13\times1+6$

$13=6\times2+1$

$$\begin{cases} 6=19-13 & \cdots\cdots ② \\ 1=13-6\times2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②を③に代入すると

$$\begin{aligned} 1&=13-(19-13)\times2 \\ &=13-19\times2+13\times2 \\ &=13\times3-19\times2 \\ &=-13\times(-3)+19\times(-2) \end{aligned}$$

よって

$19\times(-2)-13\times(-3)=1$　……④

①－④より

$19(x+2)-13(y+3)=0$

$19(x+2)=13(y+3)$

19と13は互いに素であるから，$x+2$は13の倍数である。

よって，kを整数として

$x+2=13k$

と表される。このとき

$y+3=19k$

したがって，①の一般解は

$(x,\ y)=(13k-2,\ 19k-3)$（kは整数）

xの値が正で最小であるものは，$k=1$として

$(x,\ y)=(11,\ 16)$　……**(答)**

（ⅱ）　求める整数をNとする。

Nは19で割ると4余り，13で割ると5余るから，l，mを整数として

$N=19l+4=13m+5$

とおける。このとき

$19l-13m=1$

（ｉ）の結果より

$(l,\ m)=(13k-2,\ 19k-3)$（kは整数）

であるから

$$\begin{aligned} N&=19l+4 \\ &=19(13k-2)+4 \\ &=247k-34 \end{aligned}$$

$247\times4-34=954$

$247\times5-34>1000$より

$N=954$　……**(答)**

問２

（ｉ）　xの平均値は

$$\overline{x}=\frac{1}{5}(6+9+5+3+7)$$

$$=\frac{30}{5}=6 \quad \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

xの分散は

$$\begin{aligned} s_x{}^2&=\frac{1}{5}\left\{(6-6)^2+(9-6)^2+(5-6)^2\right. \\ &\qquad \left.+(3-6)^2+(7-6)^2\right\} \\ &=\frac{20}{5}=4 \quad \cdots\cdots \textbf{(答)} \end{aligned}$$

（ⅱ）　yの平均値は

$$\overline{y}=\frac{1}{5}(4+7+1+3+5)=\frac{20}{5}=4$$

であるから，x，yの共分散は

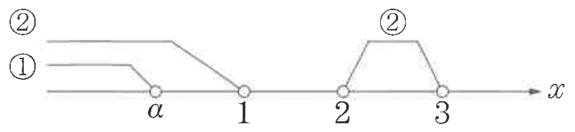
$$\begin{aligned} s_{xy}&=\frac{1}{5}\left\{(6-6)(4-4)+(9-6)(7-4)\right. \\ &\qquad +(5-6)(1-4)+(3-6)(3-4) \\ &\qquad \left.+(7-6)(5-4)\right\} \\ &=\frac{16}{5}=3.2 \quad \cdots\cdots \textbf{(答)} \end{aligned}$$

問３　$p：x<a$　……①

$q：「x<1$または$2<x<3」$……②

（ｉ）　$p\Longrightarrow q$が真

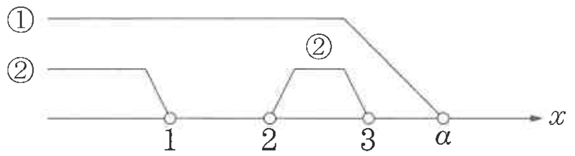
すなわち，①が②に含まれるようなaの値の範囲を求めて



$a \leqq 1$ ……(答)

（ii） $q \Longrightarrow p$ が真

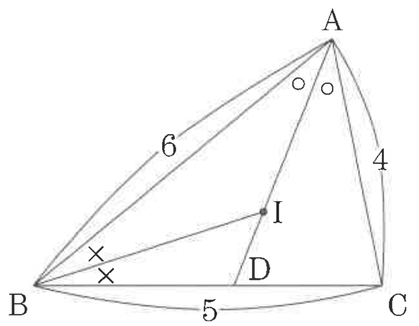
すなわち，②が①に含まれるような a の値の範囲を求めて



$a \geqq 3$ ……(答)

問 4

（i）



I は△ABC の内心であるから，AD は∠BAC の二等分線である。よって

$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$

$= 6 : 4 = 3 : 2$ ……(答)

（ii） （i）より，$\mathrm{BD} = \dfrac{3}{5}\mathrm{BC} = 3$

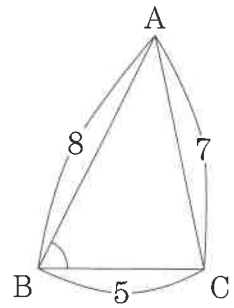
BI は∠ABD の二等分線だから

$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = \mathrm{BA} : \mathrm{BD}$

$= 6 : 3 = 2 : 1$ ……(答)

問 5

（i）



△ABC で余弦定理により

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5\cos\angle\mathrm{ABC}$$

$$80\cos\angle\mathrm{ABC} = 40$$

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \quad \text{……(答)}$$

$0^\circ < \angle\mathrm{ABC} < 180^\circ$ であるから

$\angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$

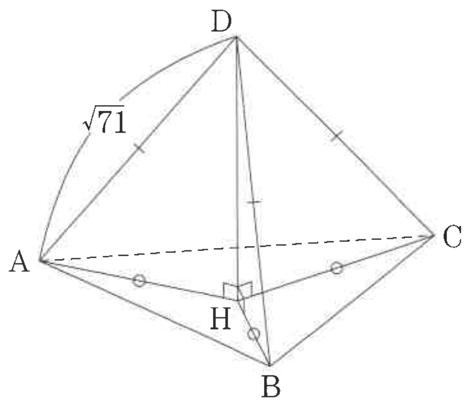
正弦定理により

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$7 = \sqrt{3}R$$

$$R = \frac{7}{\sqrt{3}} \left(= \frac{7\sqrt{3}}{3} \right) \quad \text{……(答)}$$



DA = DB = DC より

△DAH ≡ △DBH ≡ △DCH

∴AH = BH = CH

すなわち，点Hは△ABCの外心であり

$$\mathrm{AH}=R=\frac{7}{\sqrt{3}}$$

△DAHで三平方の定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{DH}^2&=\mathrm{DA}^2-\mathrm{AH}^2\\&=71-\frac{49}{3}=\frac{164}{3}\end{aligned}$$

DH＞0より $\mathrm{DH}=\dfrac{2\sqrt{41}}{\sqrt{3}}$

また

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\sin 60^\circ\\&=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH}\\&=\frac{1}{3}\cdot 10\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{41}}{\sqrt{3}}\\&=\frac{20\sqrt{41}}{3}\end{aligned}$$

……(答)

第2問

【出題のねらい】

式の値，2次方程式の解の存在範囲などについて，適切に処理できるかを問う。

［解答］

問1

（i） 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-3$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=1-2\cdot(-3)=7$ ……**(答)**

（ii） α は2次方程式

$x^2-x-3=0$

の解であるから

$\alpha^2-\alpha-3=0$

よって

$\alpha^2-\alpha=3$ ……**(答)**

（iii） （ii）より

$\alpha^2=\alpha+3$

β についても同様に

$\beta^2=\beta+3$

であるから

$(\alpha^2+\alpha-3)(\beta^2-2\beta-3)$

$=(\alpha+3+\alpha-3)(\beta+3-2\beta-3)$

$=2\alpha\cdot(-\beta)$

$=-2\alpha\beta$

$=-2\cdot(-3)$

$=6$ ……**(答)**

問2 （＊）が異なる2つの実数解をもつ条件は，判別式を D として，$\dfrac{D}{4}>0$ であるから

$k^2-(6-5k)>0$

$(k+6)(k-1)>0$

$k<-6$，$1<k$ ……**(答)**

問3 x の方程式

$x^4-2mx^2+6-5m=0$ ……①

について，$t=x^2$ とおくと

$t^2-2mt+6-5m=0$ ……②

ここで，x の2次方程式 $x^2=t$ は

$$\begin{cases} t>0 \text{ のとき異なる2つの実数解をもつ} \\ t=0 \text{ のとき0を重解にもつ} \\ t<0 \text{ のとき実数解をもたない} \end{cases}$$

であり，t の値が異なるとき x の値も異なる。よって，x の2次方程式①が異なる実数解をもつ条件は，t の2次方程式②が

「$t>0$ の範囲に異なる2つの実数解をもつ」

ことである。

$f(t)=t^2-2mt+6-5m$ とおくと

$f(t)=(t-m)^2-m^2-5m+6$

放物線 $y=f(t)$ の軸は $t=m$

$$\begin{cases} \text{頂点の } y \text{ 座標：} f(m)<0 & \cdots\cdots③ \\ \text{軸：} 0<m & \cdots\cdots④ \\ \text{端点：} f(0)>0 & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

③より

$-m^2-5m+6<0$

$m^2+5m-6>0$

$m<-6$，$1<m$ ……③′

⑤より

$6-5m>0$

$m<\dfrac{6}{5}$ ……⑤′

③′かつ④かつ⑤′より

$1<m<\dfrac{6}{5}$ ……**(答)**

［注］

②の解を A，B とおき，解と係数の関係を用いて

$$\begin{cases} \text{②の判別式} >0 \\ A+B=2m>0 \\ AB=6-5m>0 \end{cases}$$

から求めることもできる。

第3問

【出題のねらい】

場合の数，確率の基本性質，条件付き確率の求め方などを理解しているかを問う。

[解答]

問1

（i） Nの個数は，異なる9個の整数から3個選び一列に並べる順列の総数に等しく

$$m={}_9\mathrm{P}_3=504 \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

（ii） 百，十，一の位の数をそれぞれ別々に計算する。百の位が1の整数は，十，一の位に残りの8個の整数から2個選び並べて

$${}_8\mathrm{P}_2=56\text{（通り）}$$

百の位が2，……，9の整数も同様に56(通り)

よって，百の位の数だけの和を求めると

$$(1+2+\cdots\cdots+9)\times 56$$

十，一の位の数についても同様であるから

$$\begin{aligned}S&=100(1+2+\cdots\cdots+9)\times 56\\&\quad+10(1+2+\cdots\cdots+9)\times 56\\&\quad+(1+2+\cdots\cdots+9)\times 56\\&=(100+10+1)(1+2+\cdots\cdots+9)\times 56\\&=111\times 45\times 56\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{S}{m}=\frac{111\times 45\times 8\cdot 7}{9\cdot 8\cdot 7}=555 \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

問2 カードの取り出し方は全部で${}_9\mathrm{P}_3$(通り)あり，これらは同様に確からしい。Nが偶数となる事象をA，Nが3の倍数となる事象をBとする。

（i） Nが偶数となる場合は

一の位は2，4，6，8の4(通り)

百，十の位には残りの8個の整数から2個選び並べて

$$4\times{}_8\mathrm{P}_2=224\text{（通り）}$$

よって，Nが偶数となる確率$P(A)$は

$$P(A)=\frac{4\times{}_8\mathrm{P}_2}{{}_9\mathrm{P}_3}=\frac{4\cdot 8\cdot 7}{9\cdot 8\cdot 7}=\frac{4}{9} \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

（ii） 1から9までの整数を3で割った余りにより，次の3つの集合に分類する。

$$R_1=\{1,\ 4,\ 7\}$$
$$R_2=\{2,\ 5,\ 8\}$$
$$R_0=\{3,\ 6,\ 9\}$$

Nが3の倍数になるのは

ア）R_1から3つの数を選び並べる

イ）R_2から3つの数を選び並べる

ウ）R_0から3つの数を選び並べる

エ）R_1，R_2，R_0から1つずつ数を選び並べる

のいずれかの場合であり，全部で

$$3!+3!+3!+3\cdot 3\cdot 3\cdot 3!=180\text{（通り）}$$

よって，Nが3の倍数となる確率$P(B)$は

$$P(B)=\frac{180}{9\cdot 8\cdot 7}=\frac{5}{14} \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

（iii） Nが「偶数かつ3の倍数」，すなわち6の倍数となるのは

一の位が2であるものは，（ii）の

- 「R_2の残りの2つの整数を百，十の位に並べる」
- 「R_1，R_0から1つずつ数を選び，百，十の位に並べる」

のいずれかの場合であるから

$$2!+3\cdot 3\cdot 2!=20\text{（通り）}$$

一の位が4，6，8であるものも同様に

$$20\text{（通り）}$$

よって，6の倍数は$20\times 4=80$(通り)であり

$$P(A\cap B)=\frac{20\cdot 4}{9\cdot 8\cdot 7}$$

したがって，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{20\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 7}$$

$$=\frac{5}{14} \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

第４問

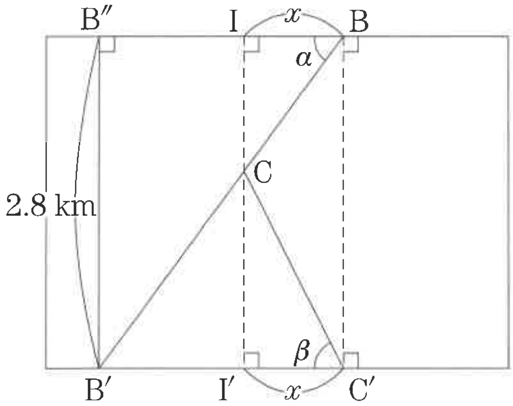
【出題のねらい】

実生活で観察される事象を題材とした問題に対して，図形の性質や座標を応用して解くことができるかを問う。

［解答］

問１

（ｉ）



図のように点 B″をとると $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$ より

△BB′B″は３辺比

$BB':B'B'':B''B=5:4:3$

の三角形である。

よって

$$BB'=\frac{5}{4}B'B''=\frac{5}{4}\times 2.8=\frac{5}{4}\times\frac{14}{5}$$

$$=\frac{7}{2}\text{ より}$$

$$b=\frac{7}{2}\,(=3.5)\,(\mathrm{km})\quad\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

また，図のように点 I，I′をとり

$IB=I'C'=x\,(\mathrm{km})$ とおくと

△BCI も３辺比 $5:4:3$ の三角形で

$$IC=\frac{4}{3}IB=\frac{4}{3}x$$

$\tan\beta=\dfrac{12}{5}$ より，△C′CI′は３辺比

$C'C:CI':I'C'=13:12:5$

の三角形であり

$$CI'=\frac{12}{5}I'C'=\frac{12}{5}x$$

$II'=IC+CI'$ より

$$\frac{14}{5}=\frac{4}{3}x+\frac{12}{5}x$$

$$x=\frac{3}{4}$$

$$BC=\frac{5}{3}IB=\frac{5}{3}x=\frac{5}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

$$CC'=\frac{13}{5}I'C'=\frac{13}{5}x=\frac{13}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{39}{20}$$

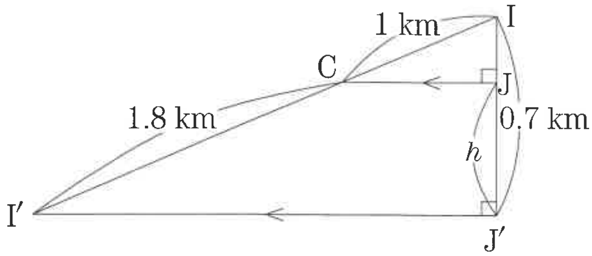
$$c=BC+CC'=\frac{5}{4}+\frac{39}{20}$$

$$=\frac{16}{5}\,(=3.2)\,(\mathrm{km})\quad\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

（ⅱ）

$IC=\dfrac{4}{3}x=1$ より

図Ｉの三角柱で点Ｃを通り X_1X_2 に垂直な平面による断面を考えると



上の図で $JJ'=h$ である。

$CJ\,/\!/\,I'J'$ より

$IJ:JJ'=IC:CI'=1:1.8=5:9$

よって

$$h=\frac{9}{14}IJ'=\frac{9}{14}\times\frac{7}{10}$$

$$=\frac{9}{20}\,(=0.45)\,(\mathrm{km})\quad\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

問 2

（ⅰ） $AA'=2.8=\dfrac{14}{5}$ (km)

P の速さは時速 35 km であるから，所要時間は

$$\frac{14}{5}\times\frac{1}{35}\ (\text{時間})$$

これを分で表すと

$$\frac{14}{5}\times\frac{1}{35}\times 60=\frac{24}{5}\ (=4.8)(\text{分}) \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

（ⅱ） （ⅰ）より，t のとり得る値の範囲は

$0\leqq t\leqq\dfrac{24}{5}$ である。

P の速さは時速 35 km であるから，1 分間に進む距離は

$$\frac{35}{60}=\frac{7}{12}\ (\text{km})$$

よって，t 分間での移動距離は

$$\frac{7}{12}t\ (\text{km})$$

また，Q の速さは時速 25 km であるから，1 分間に進む距離は

$$\frac{25}{60}=\frac{5}{12}\ (\text{km})$$

よって，t 分間での移動距離は

$$\frac{5}{12}t\ (\text{km})$$

以上より，座標平面上で

$$AP=\frac{7}{12}t$$

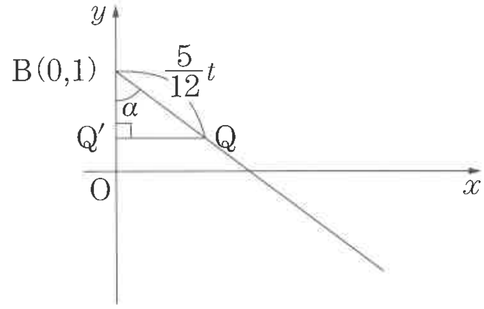
点 P の座標は

$$P\left(\frac{7}{12}t,\ 0\right) \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

また

$$BQ=\frac{5}{12}t$$

であり，Q から y 軸に垂線 QQ′を下ろすと



$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$ より，△BQ′Q は 3 辺比

$$BQ : QQ' : BQ' = 5 : 4 : 3$$

の三角形である。よって

$$QQ'=\frac{4}{5}BQ=\frac{t}{3}$$

$$BQ'=\frac{3}{5}BQ=\frac{t}{4}\ \text{より}$$

$$Q\left(\frac{t}{3},\ 1-\frac{t}{4}\right) \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

$$PQ^2=\left(\frac{t}{3}-\frac{7}{12}t\right)^2+\left(1-\frac{t}{4}\right)^2$$

$$=\left(-\frac{t}{4}\right)^2+\left(1-\frac{t}{4}\right)^2=\frac{t^2}{8}-\frac{t}{2}+1$$

$PQ\geqq 0$ より

$$PQ=\sqrt{\frac{t^2}{8}-\frac{t}{2}+1} \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

（ⅲ） （ⅱ）より

$$f(t)=\frac{t^2}{8}-\frac{t}{2}+1 \quad \left(0\leqq t\leqq\frac{24}{5}\right)$$

とおくと

$$f(t)=\frac{1}{8}(t-2)^2+\frac{1}{2}$$

$0\leqq t\leqq\dfrac{24}{5}$ より，$f(t)$ の最小値は

$$f(2)=\frac{1}{2}$$

したがって，線分 PQ の長さは，$t=2$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。

つまり

$t_1=2,\ m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……**(答)**

問 3

2 人が出発してから u 分後の R と平面 $X_1Y_1Y_2X_2$ との標高の差を d_1(km) ($d_1>0$)，S と平面 $X_1Y_1Y_2X_2$ との標高の差を d_2(km) ($d_2>0$) とする。

S が A′を出発し，A に到達するまでの所要時間は

$$\frac{14}{5}\times\frac{1}{24}\times 60=7\text{(分)}$$

7 分で標高が 0.7 km 上がるから

$$d_2=0.7\div 7\times u=\frac{1}{10}u$$

R の BC 間の所要時間は

$$\frac{5}{4}\times\frac{1}{25}\times 60=3\text{(分)}$$

CC′間の所要時間は

$$\frac{39}{20}\times\frac{1}{26}\times 60=\frac{9}{2}\text{(分)}$$

であるから，R が C に到達した時点で S は C と同じ標高の地点には到達していない。

したがって，R，S の標高が等しくなるのは，$u>3$ の場合である。

$u>3$ のとき，R は C 地点(平面 $X_1Y_1Y_2X_2$ との標高の差が $\dfrac{9}{20}$ km) から $\dfrac{9}{2}$ 分で，標高が $\dfrac{9}{20}$ km 下がるから

$$d_1=\frac{9}{20}-\frac{9}{20}\div\frac{9}{2}\times(u-3)$$

$$=\frac{9}{20}-\frac{1}{10}(u-3)$$

R，S の標高が等しくなるとき，$d_2=d_1$ ($u>3$) より

$$\frac{1}{10}u=\frac{9}{20}-\frac{1}{10}(u-3)$$

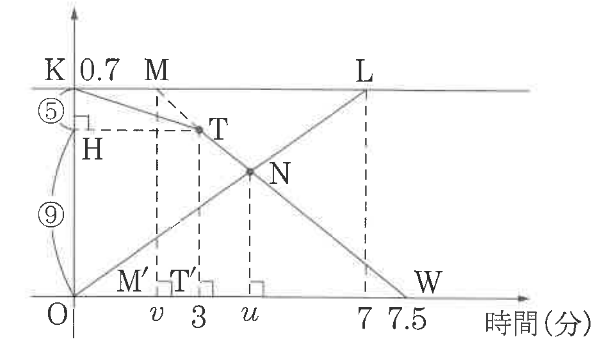
$$\frac{1}{5}u=\frac{3}{4}$$

$$u=\frac{15}{4}\ (=3.75)\ (u>3 \text{ を満たす})$$

$\dfrac{15}{4}$ (=3.75) 分後 ……**(答)**

[別解] ダイヤグラムで考える。

横軸に出発してからの経過時間，縦軸に平面 $X_1Y_1Y_2X_2$ との標高の差をとり，R，S の動きを表すと



KM // HT // OW より

MT : TW = 5 : 9

MM′ // TT′より

M′T′ : T′W = MT : TW = 5 : 9

よって

$(3-v):(7.5-3)=5:9$

$9(3-v)=22.5$

$v=0.5$

$\triangle ONW \backsim \triangle LNM$ より

$ON:NL=OW:LM=7.5:(7-0.5)$

$=15:13$

したがって

$u:(7-u)=15:13$

$13u=15(7-u)$

$$u=\frac{15}{4}$$

$\dfrac{15}{4}$ (=3.75) 分後 ……**(答)**